

Jest to tekst związany z referatem wygłoszonym na LI Szkole Matematyki Poglądowej „Modele”.

# Daktyloskopia okiem matematyka

Martha ŁĄCKA \*

Umożliwia ona ustalenie tożsamości przestępcy za pomocą badania odbitek linii papilarnych pozostawionych na miejscu zbrodni.

## 1. Początki daktyloskopii

*Daktyloskopia* to nie tylko technika śledcza, ale także źródło ciekawych problemów matematycznych. Dwa spośród nich prezentujemy poniżej.

Po pierwsze, wyobraźmy sobie, że dysponujemy bazą komputerową zeskanowanych odbitek. Z powodu niedoskonałej rozdzielczości naszych urządzeń archiwum składa się tylko z przybliżeń rzeczywistości i może się zdarzyć, że skany pochodzące od różnych ludzi będą takie same z naszego punktu widzenia. Tu powstaje pytanie: *Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwóm ludziom zostaną przyporządkowane nierozróżnialne odbitki linii papilarnych w bazie?*

Kolejne zagadnienie dotyczy częściowych odbitek linii papilarnych (taka odbitka została przedstawiona na rysunku 1). Wyobraźmy sobie, że szukając śladów na miejscu przestępstwa, natknęliśmy się na odbitkę połowy kciuka. Następnie, porównując ją z plikami z bazy, znaleźliśmy obraz palca, który do złudzenia przypomina nasz materiał dowodowy (choć tylko w tej części, którą dysponujemy — o reszcie linii papilarnych nie mamy informacji). Czy w tym momencie możemy zakończyć nasze poszukiwania? Innymi słowy, *czy prawdopodobieństwo tego, że częściowa odbitka będzie pasowała do więcej niż jednej odbitki w bazie, jest wystarczająco niskie, aby uznać, że nie obciążymy winą niewłaściwej osoby?*

Sir Francis Galton (1822–1911) — angielski naukowiec, podróżnik i lekarz.

Zanim przedstawimy modele powstałe w odpowiedzi na postawione wyżej pytania, omówmy krótko historię daktyloskopii (opieramy się tu głównie na [1]). Za twórcę tej techniki uznaje się Galtona. Jemu również przypisuje się sformułowanie tak zwanej „Zasady 3N” uzasadniającej przydatność badania odbitek linii papilarnych do identyfikowania ludzi i głoszącej, że są one **niezmienne**, **nieusuwalne** i **niepowtarzalne**. Galton próbował także wykazać istnienie korelacji między występowaniem danego typu linii papilarnych a ilorazem inteligencji, pochodzeniem czy wyznawanymi poglądami. Chociaż żadnej zbieżności między tymi cechami się nie doszukał, warte zauważenia jest, że w swoich badaniach wykorzystywał — jako jeden z pierwszych — narzędzia statystyki matematycznej. Jednak linie papilarne intrygowały badaczy już wiele lat przed Galtonem. Zainteresowanie nimi sięga co najmniej VII wieku, a historia ich poznawania jest pełna anegdot.

William Herschel (1738–1822) — brytyjski astronom, badacz i kompozytor.

Kiedy w 1877 roku William Herschel został mianowany sędzią, pojawiła się okazja, aby wykorzystał swoje zainteresowanie liniami papilarnymi w praktyce. Otóż jednym z jego obowiązków było wypłacanie rent państwowych. Herschel, zaobserwowaawszy wzrastającą liczbę oszustów podszywających się pod zmarłych rencistów, postanowił identyfikować ich za pomocą odbitek linii papilarnych. Warto zauważyć, że działało się to jeszcze zanim Galton rozpoczął swoje prace.

Henry Faulds (1843–1930) — szkocki lekarz, misjonarz i naukowiec.

Kolejną postacią, którą frapowała tajemnica linii papilarnych, był Henry Faulds, który, obserwując palce swoich znajomych, zauważył, że są one unikatowe. Podobnie jak Herschel, również i Faulds wykorzystał swoją wiedzę w życiu codziennym. Pewnego dnia ktoś włamał się do szpitala, w którym pracował Faulds. Głównym podejrzanym został jego przyjaciel. Wtedy Faulds zaproponował porównanie linii papilarnych oskarżonego z odbitkami pozostawionymi przez włamywacza i tym samym dowiódł niewinności swojego znajomego.

\*studentka, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Faulds, chcąc porozmawiać z kimś o swoich odkryciach, za pośrednictwem Darwina skontaktował się z Galtonem. I tu przechodzimy do pierwszego modelu, który, choć jako pionierski wymaga docenienia, budzi jednak wiele słów krytyki.



Rys. 1. Odbitka linii papilarnych palca.



Rys. 2. Odbitka linii papilarnych całego palca (tego samego, co na rysunku 1).

## 2. Model Galtona i jego krytyka

Pomysł Galtona opierał się na podzieleniu odbitek linii papilarnych na małe obszary, z których każdy Galton traktował jako niezależną zmienną losową. W celu określenia, jak małe powinny być regiony, aby rozsądne było uznanie, że ich wygląd nie jest uwarunkowany przez inne, Galton pokrywał odbitkę linii papilarnych coraz mniejszymi prostokątami, a następnie starał się odtworzyć ukryty obszar. W ten sposób oszacował, że jeśli podzieli odbitkę na 24 obszary, to prawdopodobieństwo tego, że uda mu się odgadnąć, co się kryje pod danym regionem, wynosi około  $1/2$ . Ponadto, Galton określił różne typy ułożenia linii papilarnych na palcu i oszacował prawdopodobieństwo wystąpienia konkretnego z nich jako  $1/16$ . Rysunek 3 pokazuje cztery główne rodzaje takich konfiguracji.



Łuk

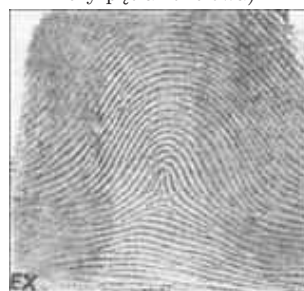


Pętla

(występują różne rodzaje pętli, np. pętla promieniowa czy pętla łokciowa)



Okółek



Łuk namiotowy

Rys. 3. Różne konfiguracje linii papilarnych.

W swoim modelu badacz ten uwzględnił także liczbę linii papilarnych wychodzących z każdego obszaru. Prawdopodobieństwo tego, że ta wielkość się powtórzy, wyestymował jako  $1/256$ . Podsumowując, według Galtona prawdopodobieństwo wystąpienia konkretnego ułożenia linii papilarnych wynosiło około

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{24} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{64 \cdot 10^9}.$$

Już ten etap przeprowadzonej przez Galtona analizy spotkał się z dużą krytyką. Badaczowi zarzucano między innymi niedokładność. Szczególne kontrowersje budził czynnik  $(1/2)^{24}$ , który był potem korygowany przez różnych badaczy (np. przez Pearsona [2]).

Galton założył również, że do jego czasów na świecie żyło około  $16 \cdot 10^9$  ludzi i wywnioskował na podstawie tej informacji, iż prawdopodobieństwo tego, że dwóm ludziom zostanie przypisana ta sama odbitka z jego bazy, wynosi około  $(16 \cdot 10^9)/(64 \cdot 10^9) = 1/4$ . Oczywiście, powyższe rozumowanie jest również błędne. Wiedząc, że mamy około  $64 \cdot 10^9$  różnych odbitek w bazie oraz że chcemy je przyporządkować do około  $16 \cdot 10^9$  ludzi, prawdopodobieństwo tego, że żadnej parze ludzi nie zostanie przypisana ta sama odbitka w bazie, wynosi:

$$\left(1 - \frac{0}{64 \cdot 10^9}\right) \left(1 - \frac{1}{64 \cdot 10^9}\right) \dots \left(1 - \frac{(16 \cdot 10^9 - 1)}{64 \cdot 10^9}\right).$$

Korzystając teraz ze znanej nierówności:

$$1 - x < e^{-x},$$

Autorzy [1] porównują to rozumowanie do znanego problemu urodzin: w świecie, w którym rok ma  $64 \cdot 10^9$  dni, pytamy, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w grupie liczącej  $16 \cdot 10^9$  ludzi żadne dwie postaci nie obchodzą urodzin tego samego dnia.

można oszacować, że w modelu Galtona prawdopodobieństwo tego, że nie istnieje dwóch ludzi, którym zostałyby przypisane te same odfitki palców, jest mniejsze niż  $\frac{1}{10^{10^9}}$ ! Odwracając problem (i wykonując analogiczne obliczenia), da się też stwierdzić, że aby to prawdopodobieństwo było większe niż 0,999, potrzebnych jest aż  $10^{25}$  modelowych odfitek linii papilarnych.

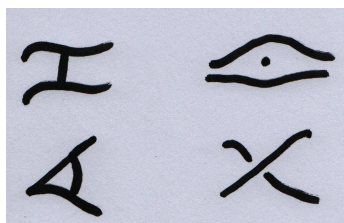
### 3. Rywalizując z Galtonem

Z daktyloskopią konkurowała antropometria kryminalistyczna opracowana przez Alphonsa Bertillona. Była to metoda badawcza polegająca na wykonywaniu serii pomiarów ciała (mierzone na przykład długość ciała od lewego ramienia do prawego środkowego palca uniesionej ręki czy długość prawego ucha). Ten sposób identyfikacji był niewygodny i niedokładny. Ponadto, pomiary ludzi o podobnej budowie ciała były bardzo zbliżone. Mimo to przez pewien czas to właśnie on obowiązywał w niektórych państwach, ponieważ forsowana przez Galtona metoda miała poważny defekt: odfitki linii papilarnych były ciężkie do sklasyfikowania.



Rys. 4. Pomiary zgodnie z metodą Bertillona

Źródło: A.J.N. Tremearne, „A New Head-Measurer”, *Man* 15 (1914): 87-88.



Rys. 5. Przykładowe minucje.

Wielki wkład w metodologię klasyfikacji odfitek linii papilarnych miał brytyjski komisarz policji Edward Henry (1850–1931).

### 4. Współczesny model

Naszkicujemy teraz model pochodzący z pracy [3]. W tym celu musimy wprowadzić jeszcze jedno pojęcie. *Minucje* (znane też jako *punkty Galtona*) to charakterystyczne punkty odfitek linii papilarnych. Są nimi, na przykład, początki, zakończenia czy rozwidlenia linii papilarnych lub pojedyncze kropki (przykładowe minucje schematycznie pokazane są na rysunku 5). Zwykle jedna odfitka ma 30–40 minucji. W niektórych państwach zgodność dostatecznie dużej liczby minucji na materiale dowodowym i odfitce z bazy jest dowodem na udział w przestępstwie, przy czym jej minimalna wartość różni się w poszczególnych krajach.

Autorzy [3] rozważają model, który może być przydatny, na przykład, w sytuacji, kiedy wszystkie minucje znalezionej na miejscu przestępstwa odfitki zgadzają się z minucjami pewnej odfitki w bazie, jednak jest to tylko odfitka częściowa. Badacze ci przyjmują, że każda minucja to para:

$$\text{minucja} = (\text{położenie}(\text{minucja}), \text{kierunek}(\text{minucja})).$$

Dokonując komputerowej analizy próbki odfitek z bazy, autorzy tego modelu stwierdzili, że gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia określonej minucji (rozpatrujemy tutaj tylko położenie) jest kombinacją liniową gęstości trzech rozkładów normalnych. Zatem gęstość  $\rho$  wystąpienia minucji w pewnym kierunku wynosi:

$$\rho((s, \theta)) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathcal{N}_i(s) \mathcal{V}_i(\theta),$$

gdzie  $\lambda_i$  to waga  $i$ -tego rozkładu,  $\mathcal{N}_i$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa  $i$ -tego rozkładu normalnego określającego położenie minucji, a  $\mathcal{V}_i$  oznacza gęstość

rozkładu kąta minucji odpowiadającego  $i$ -temu rozkładowi położenia. Autorzy przyjęli ponadto, że dwie minucje są bliskie, jeśli występują w podobnym miejscu na odblasku oraz wyznaczają zbliżone kąty.

**Definicja** Minucje  $x_1 = (s_1, \theta_1)$  i  $x_2 = (s_2, \theta_2)$  są  $\varepsilon = (\varepsilon_s, \varepsilon_\theta)$ -bliskie (co oznaczamy jako  $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon$ ), jeśli spełnione są następujące dwa warunki:

1.  $|s_1 - s_2| \leq \varepsilon_s$ ,
2.  $\min\{|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|\} \leq \varepsilon_\theta$ ,

gdzie  $|s_1 - s_2|$  oznacza odległość euklidesową.

Możemy teraz określić prawdopodobieństwo  $P_\varepsilon(x)$  tego, że dwie minucje są  $\varepsilon$ -bliskie:

$$P_\varepsilon(x) = P(|x_1 - x_2| \leq \varepsilon) = \int_{X_1} \int_{|X_1 - X_2| \leq \varepsilon} \rho(x_1) \rho(x_2) dx_1 dx_2.$$

Twórcy tego modelu określają również prawdopodobieństwo tego, że dwie odblaski zgadzają się co do  $m$  minucji:

$$P_\varepsilon(m, m_1, m_2) = \binom{m_1}{m} \binom{m_2}{m} m! \cdot P_\varepsilon(x)^m (1 - P_\varepsilon(x))^{(m_1-m) \cdot (m_2-m)},$$

gdzie przez  $m_i$  oznaczamy liczbę minucji na  $i$ -tej odblasku.

W artykule podane są również pewne wyniki liczbowe. Prawdopodobieństwo tego, że dwie odblaski, z których każda ma 16 minucji, zgadzają się co do 12 minucji, wynosi  $P_\varepsilon = 2.2 \cdot 10^{-5}$  (przyjmujemy tutaj  $\varepsilon_s = 10$  pixeli oraz  $\varepsilon_\theta = \pi/8$ ). Czytelnikowi polecamy ocenić na tej podstawie, czy jeśli częściowa odblaska znaleziona na miejscu przestępstwa ma 12 minucji, które są zgodne z 12 spośród 16 minucji pewnej odblaski z bazy, to można uznać, że przestępca został zidentyfikowany.

Jak widać, miłośnicy modelowania mogą odnaleźć ciekawe obszary do badania, rozważając problemy daktyloskopii. Są to zagadnienia, które zarówno dostarczają satysfakcji naukowej, jak i mogą pomóc społeczeństwu w bardzo praktycznych kwestiach.

## Literatura

- [1] Ch. M. Grinstead, W. P. Peterson, J. L. Snell *Probability Tales*, American Mathematical Society, 2011
- [2] D. A. Stoney, J. I. Thorton *A Critical Analysis of Quantitative Fingerprint Individuality Models*, JFSCA, Vol. 31, No. 4, październik 1986 r., str. 1187-1214
- [3] Ch. Su, S. N. Srihari *Probability of Random Correspondence for Fingerprints*, Computational Forensics, Lecture Notes in Computer Science, Volume 5718, str. 55-66